

Fraktály ve fyzice

Oldřich Zmeškal

Ústav fyzikální a spotřební chemie, Fakulta chemická, Vysoké učení technické,
Purkyňova 118, 612 00 Brno, Česká republika
Email: zmeskal@fch.vutbr.cz

Abstrakt. Příspěvek se zabývá aplikací fraktální geometrie při formulování zákonů popisujících vlastnosti fyzikálních polí. K popisu vlastností takovýchto objektů se používají dva základní parametry: fraktální dimenze D , která charakterizuje trend opakování motivu objektu v E -rozměrném prostoru při změně měřítka a fraktální míra K , která charakterizuje počet elementárních objektů, ze kterých je fraktální struktura složena. Výsledky zobecňují známé poznatky popisující interakce mezi bodovými objekty, tj. objekty s fraktální dimenzí $D = 0$ (např. hmotnými body, bodovými elektrickými náboji), resp. hmotnými nebo nabitými tělesy ($D = E = 3$) na objekty mající fraktální strukturu $D \in \langle 0, E \rangle$. Odvozené vztahy lze použít také k popisu vlastností jiných druhů polí (akustických, teplotních, atd.) Lze je také aplikovat obecně na E -rozměrný prostor, tj. např. k popisu vlastností časoprostoru (speciální a obecná teorie relativity).

Klíčová slova. fraktální struktury, fraktální dimenze, fraktální míra, fyzikální pole, fraktální geometrie, elektrostatické pole, gravitační pole

1. Úvod

Většina přírodních objektů má fraktální charakter [1, 2]. Jejich vlastnosti mohou být popsány dvěma základními parametry fraktální mírou K a fraktální dimenzí D . Fraktální míra přitom definuje zaplněnost prostoru elementární buňkou mající určité vlastnosti (hmotnost, elektrický náboj, obecně energii), fraktální dimenze pak trend změny zaplněnosti prostoru při změně měřítka (jeho velikost může být menší nebo větší než je velikost měřicí buňky).

Fraktální dimenze se může měnit mezi dvěma limitními hodnotami:

- pro $D = 0$ bude změna fraktální struktury při změně měřítka maximální (v reálném světě tomu odpovídají idealizované objekty, např. hmotný bod, bodový elektrický náboj),

- pro $D = E$, kde $E = 3$ je euklidovská dimenze prostoru, nebude změna vlastností struktury na velikosti měřítka záviset (v reálném světě to může být např. tuhé těleso, ideální plyn, homogenně rozložený elektrický náboj atd.).

2. Zaplněnost prostoru fraktální strukturou

Fraktální míru K lze definovat rovnicí [3, 4]

$$K = N(\varepsilon)\varepsilon^D = m r_0 (1/r)^D, \quad (1)$$

kde ε je velikost měřítka, $N(\varepsilon)$ je počet objektů o velikosti ε , které pokrývají danou strukturu, resp. m je počet opakování zmenšeného objektu v síti o velikosti r_0 a $1/r$ je změna měřítka. Fraktální dimenzi D struktury lze potom určit derivací (1) podle velikosti (resp. změny) měřítka

$$D = - \frac{d \ln N(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} \approx \frac{\ln(m)}{\ln(r)}. \quad (2)$$

Fraktální dimenze 2D (plošných) objektů může být určena numericky např. pomocí předcházejících rovnic užitím počítačů např. metodou počítání čtverců ("box counting method") nebo "mass method". Obě metody jsou navzájem komplementární ($\varepsilon = 1/r$, $N(\varepsilon) = m r_0$) a dávají stejné výsledky fraktální dimenze D . Pokrytí plochy fraktálním objektem může být tedy popsáno rovnicí

$$S(r) = \frac{N(r)}{r^2} = \frac{m r_0}{r^2} = K \cdot r^{D-2}. \quad (3)$$

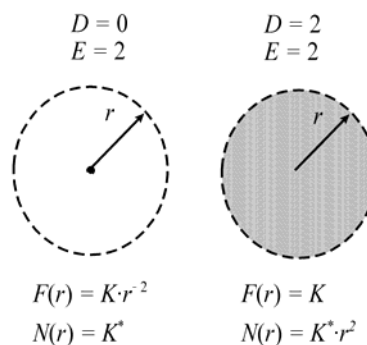
Rovnice (3) může být zobecněna pro E -dimenzionální prostor na tvar

$$F(r) = \frac{N(r)}{r^E} = \frac{m r_0}{r^E} = K \cdot r^{D-E}, \quad (4)$$

kde E je topologická dimenze prostoru. Hodnotu $F(r)$ si nazveme zaplněnost (pokrytí) prostoru. Poslední rovnice vyjadřuje závislost zaplněnosti prostoru na jeho velikosti (určeném např. délkou hrany r v E -rozměrném prostoru), ale také na parametrech K a D . Fraktální dimenze se tedy může měnit v intervalu $D \in \langle 0, E \rangle$.

Limitní případy jsou

- zaplněnost prostoru fyzikální veličinou se pro $D = 0$ (t.j. když množství veličiny je nezávislé na velikosti prostoru, $N(r) = K$) snižuje s jeho velikostí podle vztahu $F(r) = K \cdot r^{-E}$ (pro $r > 1$).
- zaplněnost prostoru je nezávislá na velikosti prostoru pro $D = E$ (t.j. prostor je homogenně zaplněn) a je rovno fraktální míře $F(r) = K$. Počet objektů v ohraničené oblasti (pro $r > 1$) se zvyšuje s jeho velikostí podle $N(r) = K \cdot r^E$.



obr. 1 Pokrytí (zaplněnost) dvou-dimenzionálního prostoru

Situace pro 2D prostor je znázorněna na obr. 1; rozdílné konstanty K a K^* jsou způsobeny radiálním ohraničením prostoru (čtvercová oblast byla nahrazena kruhovou)

3. Intenzita a potenciál fyzikálního pole

Hustotu fraktální fyzikální veličiny $\rho(r)$ (např. hustotu elektrického náboje nebo hustotu hmotnosti) v E -rozměrném euklidovském prostoru můžeme definovat vztahem

$$\rho(r) = eF(r) = eKr^{D-E}, \quad (5)$$

kde r je poloměr elementární buňky, e je kvantum fyzikální veličiny, K fraktální míra a D fraktální dimenze.

Z tohoto vztahu můžeme také určit množství fyzikální veličiny $Q(r)$ (např. hmotnosti nebo elektrického náboje) v prostoru o objemu V^*

$$Q(r) = eN(r) = \int_{V^*} \rho dV^* = eK \frac{Er^D}{D} = \frac{Er^E}{D} \rho(r), \quad (6)$$

kde $dV^* = d(r^E)$ je elementární objem E -rozměrného prostoru.

Intenzitu fyzikálního pole E můžeme určit užitím Gauss-Ostrogradského věty

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = k \cdot \rho(r), \quad (7)$$

pro radiální pole pomocí vztahu

$$\frac{D}{D-E+1} \frac{dE_r}{dr} = k \cdot \rho(r), \quad (8)$$

kde konstanta k je úměrná příslušné fyzikální konstantě (např. permitivitě nebo gravitační konstantě).

Intenzita elektrického pole E a potenciál V souvisí navzájem vztahem

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V, \quad (9)$$

takže obě veličiny souvisí s hustotou fraktální veličiny $\rho(r)$ pomocí vztahu

$$\Delta V = -\operatorname{div} \mathbf{E} = -k \cdot \rho(r), \quad (10)$$

kde Δ je Laplaceův operátor.

Tato rovnice může být pro radiální rozdělení fraktální veličiny $\rho(r)$ přepsána do tvaru

$$\frac{D}{D-E+1} \frac{d^2 V_r}{dr^2} = -k \cdot \rho(r). \quad (11)$$

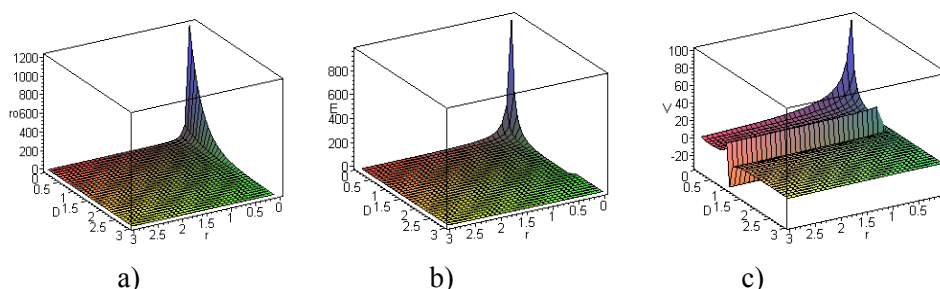
Z těchto vztahů lze vypočítat závislost intenzity a potenciálu radiálního fyzikálního pole

$$E_r = k(eK) \cdot \frac{r^{D-E+1}}{D}, \quad V_r = -k(eK) \cdot \frac{r^{D-E+2}}{D(D-E+2)}. \quad (12)$$

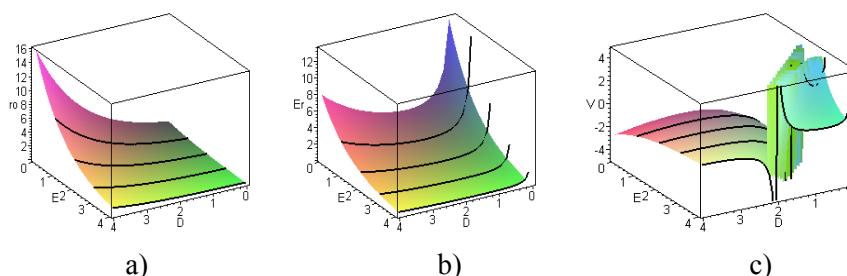
na velikosti r elementární buňky.

Závislost radiálních složek hustoty fyzikální veličiny, intenzity a potenciálu fyzikálního pole pro různé hodnoty fraktální dimenze jsou znázorněny na obr. 2 a obr. 3. Z hustoty fyzikální veličiny $\rho(r)$ dané vztahem (5) lze určit radiální složku intenzity E_r a také odpovídající potenciál V_r fyzikálního (např. elektrického nebo gravitačního) pole.

V následující části je tento, čistě matematický aparát použit pro popis vlastností elektrostatického a gravitačního pole.



obr. 2 Závislost fyzikální veličiny na vzdálenosti a na fraktální dimenzi D a) radiální hustota fyzikální veličiny $\rho(r, D)$, b) radiální intenzita pole fyzikální veličiny $E_r(r, D)$ a c) radiální potenciál fyzikálního pole $V_r(r, D)$ pro topologickou dimenzi $E = 3$



obr. 3 Závislost fyzikální veličiny na topologické dimenzi E a fraktální dimenzi D a) radiální hustoty fyzikální veličiny $\rho(r, D)$, b) radiální intenzity fyzikálního pole $E_r(r, D)$ a c) radiálního potenciálu $V_r(r, D)$ pro rozměr $r = 2$

4. Elektrostatické a gravitační pole

Hustota fraktální fyzikální veličiny $\rho(r)$ ve trojdimenzionálním prostoru ($E = 3$) lze přepsat podle (5) do tvaru

$$\rho(r) = \rho_0 r^{D-3}, \quad (13)$$

kde $\rho_0 = eK$ a e je kvantum fyzikální veličiny.

Pomocí rovnice (7) lze určit také množství fyzikální veličiny $Q(r)$ (např. hmotnosti nebo elektrického náboje) ve 3D prostoru

$$Q(r) = \rho_0 \frac{3r^D}{D} = Q_0 r^D, \quad (14)$$

kde $Q_0 = 3\rho_0/D$ je hmotnost (elektrický náboj) v prostoru o velikosti $r = 1$. Intenzita a potenciál fyzikálního pole pak může být zapsána jako (12)

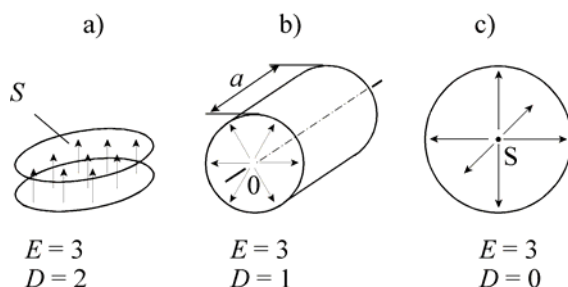
$$E_r = k\rho_0 \cdot \frac{r^{D-2}}{D}, \quad V_r = -k\rho_0 \cdot \frac{r^{D-1}}{D(D-1)}. \quad (15)$$

Konstanta k v těchto vztazích má různý význam pro jednotlivé typy polí a pro různé fraktální dimenze (viz Tabulka I).

Tabulka I Typické fraktální dimenze v E -rozměrném prostoru

D	nezávislá veličina	typ pole	objem	$k\rho_0$ (elstat)	$k\rho_0$ (grav)
0	$Q, M = \text{konst.}$	bodový objekt/sférické	$V^* = 4\pi r^3/3$	$Q_0/4\pi\epsilon_0$	GM_0
$E-2$	$V_r = \text{konst.}$	ekvipotenciální/cylindrické	$V^* = 2\pi r^3$	$\tau_0/2\pi\epsilon_0$	$2G\tau_0$
$E-1$	$E_r = \text{konst.}$	homogenní/rovinné	$V^* = 8r^3$	σ_0/ϵ_0	$4\pi G\sigma_0$
E	$\rho = \text{konst.}$	homogenní hustota		ρ_0/ϵ_0	$4\pi G\rho_0$

Veličiny popsané v předcházející části byly užity pro popis vlastností elektrostatického pole s definovaným rozdělením elektrického náboje. V následující části budou diskutovány speciální případy, např. intenzita a potenciál pole v okolí homogenně nabitě rovinné desky ($D = E - 1 = 2$), resp. homogenně nabitě tyče ($D = E - 2 = 1$). Jsou zde uvedeny také vztahy popisující vlastnosti elektrostatického pole v okolí bodového náboje ($D = 0$), resp. v homogenně nabitém tělese ($D = E = 3$) (viz obr. 4)



obr. 4 Speciální geometrie pro a) rovinné, b) cylindrické, c) sférické pole ve 3D prostoru

Pro fraktální dimenzi $D = 0$ a euklidovskou dimenzi $E = 3$, tj. pro radiální intenzitu E_r a potenciál V_r elektrického pole ve vzdálenosti r od bodového elektrického náboje Q lze rovnici (16) přepsat do tvaru

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{r^2}, \quad V_r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{r}, \quad (16)$$

kde $\varepsilon_0 \varepsilon_r$ je permitivita prostředí, $k = 3/(4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r)$ a $4\pi/3$ je koeficient pro transformaci z krychle na kouli

Pro $D = E$ představuje rovnice (16) ve 3D prostoru ($E = 3$) např. intenzitu a potenciál elektrického pole uvnitř homogenně nabitého tělesa s konstantní hustotou elektrického náboje ρ

$$E_r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon_r} r, \quad V_r = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0\varepsilon_r} r^2, \quad (17)$$

kde $k = 1/\varepsilon_0\varepsilon_r$.

Pro $D = E - 1 = 2$ definuje rovnice (16) ve 3D prostoru ($E = 3$) např. intenzitu a potenciál elektrostatického pole v okolí homogenně nabitě desky s konstantní plošnou hustotou náboje σ

$$E_r = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon_r} = \text{const.}, \quad V_r = -\frac{\sigma r}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}, \quad (18)$$

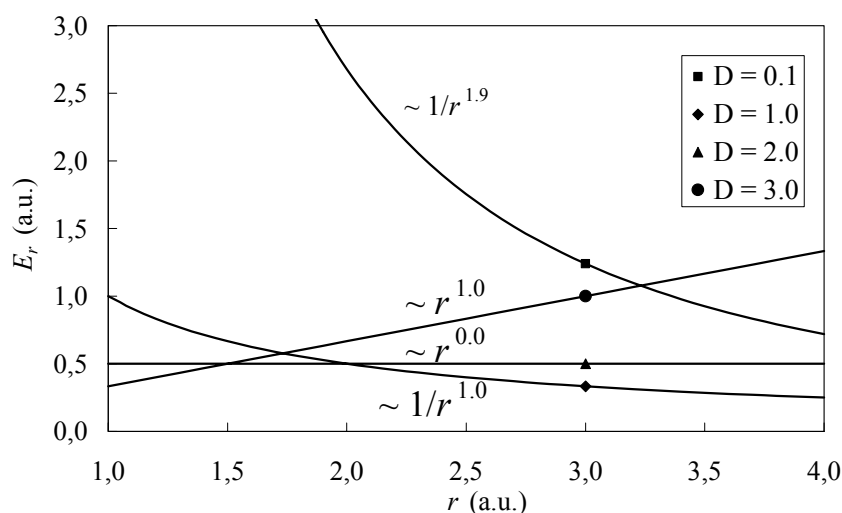
kde $k = 1/\varepsilon_0\varepsilon_r$.

Pro $D = E - 2 = 1$ reprezentuje (16) ve 3D prostoru ($E = 3$) elektrické pole a potenciál v okolí homogenně nabitě tyče s konstantní lineární hustotou náboje τ

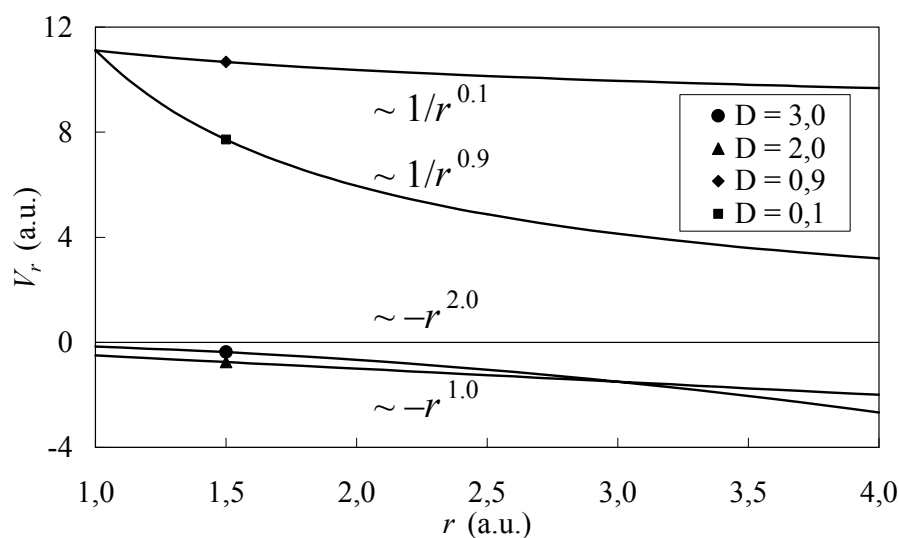
$$E_r = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}, \quad V_r = \frac{\tau \ln(r/r_0)}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}, \quad (19)$$

kde $k = 1/2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r$, π je koeficient pro transformaci z krychle na válec a r_0 je vzdálenost tyče od místa s nulovým potenciálem (např. $r_0 \rightarrow \infty$).

Závislosti radiální složky intenzity elektrostatického pole pro různé hodnoty fraktální dimenze D je znázorněna na obr. 5. Strmost závislostí souhlasí s poznatky známými pro speciální případy. Pro homogenní těleso, resp. homogenně nabitě těleso je strmost závislosti lineárně rostoucí $m \sim r$ ($E = 3$, $D = 3$); pro homogenní gravitační, resp. elektrostatické pole je $m \sim \text{konst.}$ ($E = 3$, $D = 2$) a pro homogenní, resp. homogenně nabitou tyč je $m \sim 1/r$ ($E = 3$, $D = 1$). Pro bodový elektrický náboj (Coulombův zákon) nebo hmotný bod (Newtonův zákon) bude se závislost limitně blížit hodnotě $m \sim 1/r^2$ ($E = 3$, $D \rightarrow 0$). Závislost pro $D = 0,1$, což je hodnota blízká ideálnímu případu je znázorněna na obrázku.



obr. 5 Závislosti radiální složky intenzity fyzikálního pole $E_r(r)$ pro topologickou dimenzi $E = 3$ a různé fraktální dimenze



obr. 6 Závislosti radiální složky potenciálu fyzikálního pole $V_r(r)$ pro topologickou dimenzi $E = 3$ a různé fraktální dimenze

Závislost radiální složky potenciálu pro různé hodnoty fraktální dimenze D jsou zobrazeny na obr. 6. Pro homogenní těleso, resp. homogenně nabitě těleso bude strmost potenciálu na vzdálenosti růst parabolicky $m \sim r^2$ ($E = 3$, $D = 3$), pro homogenní pole v okolí rovinných těles, resp. plošně nabitých desek bude závislost lineární $m \sim r$ ($E = 3$, $D = 2$). Pro lineární tyč, resp. lineárně nabitou tyč bude situace složitější. Strmost se bude (pro $E = 3$, $D \rightarrow 1$) limitně blížit konstantě $m \sim \text{konst.}$, ale pro $D = 1$ nebude závislost definována. Na obrázku je uvedena závislost pro $D = 0.9$,

což je hodnota blízká diskontinuitě. Pro bodový náboj (Coulombův zákon) nebo hmotný bod (Newtonův gravitační zákon) bude strmost potenciálu $m \sim 1/r$ ($E = 3$, $D \rightarrow 0$). Na obrázku je uvedena závislost pro $D = 0,1$, což je hodnota blízká ideálnímu případu.

5. Závěr

Příspěvek se zabývá komplexním popisem konzervativních polí v okolí fraktálních objektů v euklidovském prostoru. Jsou definovány fyzikální veličiny použité k popisu různých vlastností fyzikálních polí (elektrického a gravitačního). Použitý matematický aparát byl aplikován také na popis elektrických vlastností polovodičů, tepelných vlastností ideálního plynu [5] ale také k popisu vlastností elementárních částic [6, 7, 8].

6. Literatura

1. B. B. Mandelbrot, *Fractal geometry of nature*. New York: W.H. Freeman and Co. (1983)
2. M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*. Boston: Academic Press (1988)
3. O. Zmeskal, M. Nezadal, M. Buchniecek, *Chaos, Solitons & Fractals* **17**, 113 (2003)
4. O. Zmeskal, M. Nezadal, M. Buchniecek, *Chaos, Solitons & Fractals*; **19**, 1013 (2004)
5. O. Zmeskal, M. Buchniecek, M. Vala, *Chaos, Solitons & Fractals* **25**, 941 (2005)
6. M. S. El Naschie, *Chaos, Solitons & Fractals*, **19**, 209 (2004)
7. M. S. El Naschie, *Chaos, Solitons & Fractals*, **20**, 437 (2004)
8. O. Zmeskal, M. Buchniecek, P. Bednar, *Chaos, Solitons & Fractals* **19**, 1013 (2004)